第 4 节 向量的坐标运算与建系运用（★★★）

强化训练

1．（2021・全国乙卷・★）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,4)$，若 $(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $\lambda=$______.

答案： $\dfrac{3}{5}$

解析： $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=(1,3)-(3\lambda,4\lambda)=(1-3\lambda,3-4\lambda)$，$(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}\Rightarrow(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=3(1-3\lambda)+4(3-4\lambda)=0\Rightarrow\lambda=\dfrac{3}{5}$.

2．（2023・江西上饶模拟・★）已知向量 $\boldsymbol{a}=(2\sqrt{3},2)$，$\boldsymbol{b}=(0,-2)$，$\boldsymbol{c}=(k,\sqrt{3})$，若 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则 $k=$（　　）

（A）4　（B）3　（C）2　（D）1

答案： D

解析： 有坐标，翻译向量共线用 $x_1y_2=x_2y_1$，

由题意，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(2\sqrt{3},2)-2(0,-2)=(2\sqrt{3},6)$，

因为 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，所以 $2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=k\cdot 6$，故 $k=1$.

《一数•高考数学核心方法》

3．（2023・新疆乌鲁木齐模拟・★）已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，若 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}(mn\neq 0)$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\dfrac{m}{n}=$（　　）

（A）$-\dfrac{1}{2}$　（B）$\dfrac{1}{2}$　（C）-2　（D）2

答案： A

解法 1： 由题意，$m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(2m-n,3m+2n)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(4,-1)$，

因为 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 共线，所以 $(2m-n)\cdot(-1)=4(3m+2n)$，整理得：$2m+n=0$，所以 $\dfrac{m}{n}=-\dfrac{1}{2}$.

解法 2： 注意到 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，故也可把所给向量共线翻译成 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的系数成比例，找到 m 和 n 的关系，

因为 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}(mn\neq 0)$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 共线，所以 $\dfrac{m}{1}=\dfrac{n}{-2}$，故 $\dfrac{m}{n}=-\dfrac{1}{2}$.

4．（2023・安徽芜湖模拟・★★）已知向量 $\boldsymbol{a}=(5,-4)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为（　　）

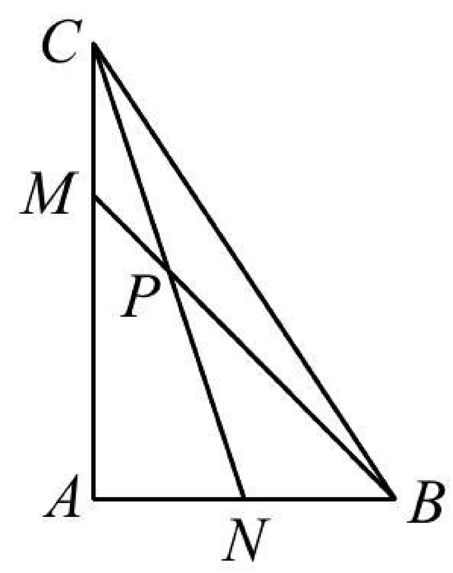
（A）$(4,0)$　（B）$(5,0)$　（C）$(-4,0)$　（D）$(-5,0)$

答案： B

解析： 算投影向量，可代内容提要 1 中的公式⑦，

由题意，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=\dfrac{5\times 1+(-4)\times 0}{1^2}\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{b}=(5,0)$.

5.（2023•四川模拟•★★）如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle A=90^{\circ}$，$AB=2$，$AC=3$，$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AN}$，$CN$ 与 BM 交于点 P，则 $\cos\angle BPN$ 的值为_____.



答案：$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

解析：$\angle BPN$ 可以看成 $\overrightarrow{MB}$ 与 $\overrightarrow{CN}$ 的夹角，故用夹角余弦公式处理，在直角三角形中，建系很方便，

如图建系，则 $B(2,0)$，$C(0,3)$，

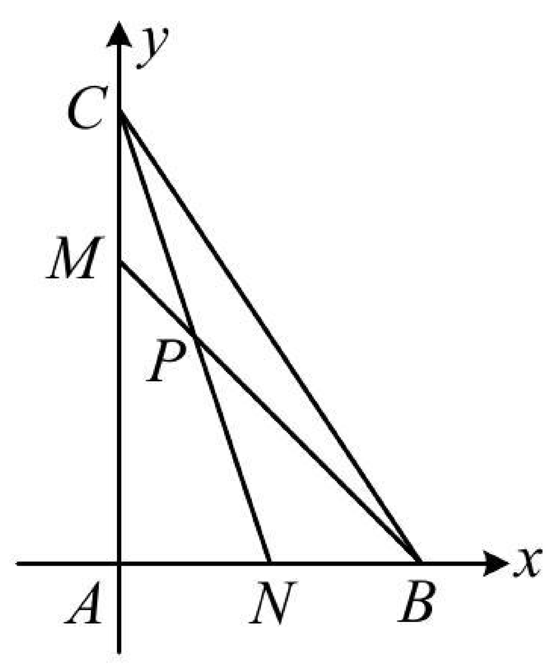
由 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AN}$ 可得 $M(0,2)$，$N(1,0)$，

所以 $\overrightarrow{MB}=(2,-2)$，$\overrightarrow{CN}=(1,-3)$，

故 $\cos\angle BPN=\cos<\overrightarrow{MB},\overrightarrow{CN}>=\dfrac{\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CN}}{|\overrightarrow{MB}|\cdot|\overrightarrow{CN}|}$

$=\dfrac{2\times1+(-2)\times(-3)}{\sqrt{2^2+(-2)^2}\times\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

《一数•高考数学核心方法》



6.（2022•上海模拟•★★）在 ΔABC 中，$\angle A=90^{\circ}$，$AB=AC=2$，点 M 为边 AB 的中点，点 P 在边 BC 上，则 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{CP}$ 的最小值为_____.

答案：$-\dfrac{9}{8}$

解析：图形为直角三角形，建系比较方便，

建立如图所示的平面直角坐标系，则 $M(1,0)$，$C(0,2)$，

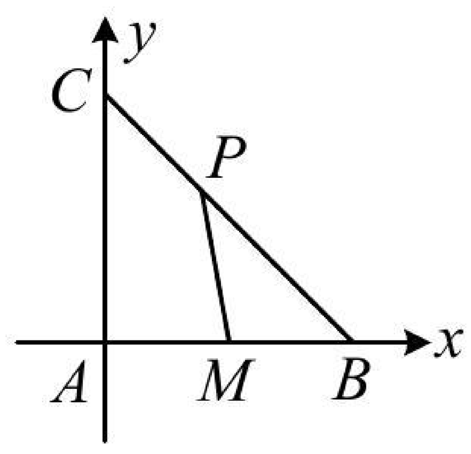
直线 BC 斜率为 -1，且过点 C，其方程为 $y=2-x$，

所以可设 $P(x,2-x)$，$0\le x\le 2$，

从而 $\overrightarrow{MP}=(x-1,2-x)$，$\overrightarrow{CP}=(x,-x)$，

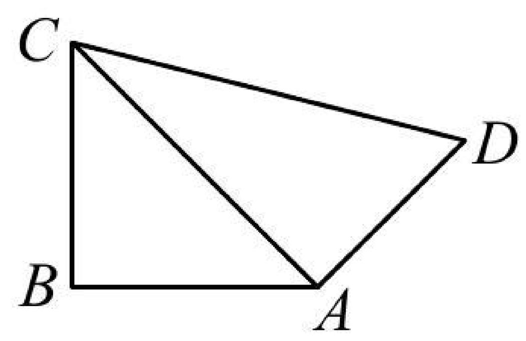
故 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{CP}=(x-1)x+(2-x)(-x)=2x^2-3x=2(x-\dfrac{3}{4})^2-\dfrac{9}{8}$，

所以当 $x=\frac{3}{4}$ 时，$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{CP}$ 取得最小值 $-\frac{9}{8}$.



7.（2022・福建模拟・★★）如图，平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC$，$AD\perp AC$，$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，若 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则 $\frac{y}{x}=$（　　）

（A）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）2



答案：B

解析：图形中有现成的直角，容易建系，故建系翻译条件 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，

如图建系，不妨设 $AB=BC=1$，则 $B(0,0)$，$A(1,0)$，$C(0,1)$，由题意，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2}$，

《一数•高考数学核心方法》

还需要点 D 的坐标，可作 $DE\perp x$ 轴于 E，只要求出 AE 和 DE 的长，即可得到 D 的坐标，

因为 $AD\perp AC$，$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle ACD=\frac{\pi}{6}$，

$AD=AC\cdot\tan\angle ACD=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

由题设可得 $\angle BAC=\frac{\pi}{4}$，$\angle CAD=\frac{\pi}{2}$，

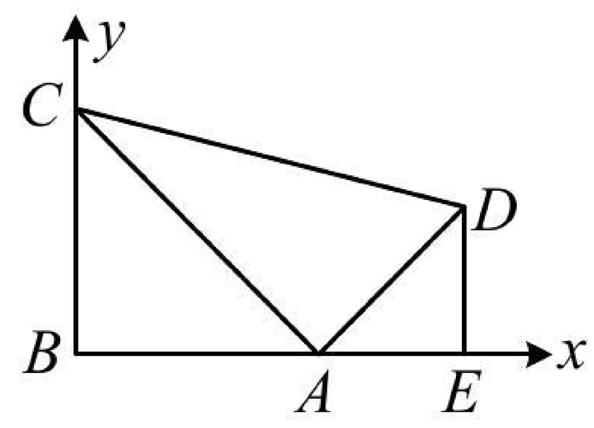
所以 $\angle DAE=\frac{\pi}{4}$，故 $AE=DE=\frac{\sqrt{2}}{2}AD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $BE=AB+AE=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $D(1+\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(-1,1)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，

因为 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，所以 $\begin{cases}-1=-x+\frac{\sqrt{3}}{3}y\\1=\frac{\sqrt{3}}{3}y\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x=2\\y=\sqrt{3}\end{cases}$，故 $\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



8．（★★★）已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=4$，$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量与 $\boldsymbol{a}$ 反向且长度为 2，则 $|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$ 的最小值为_____.

答案：10

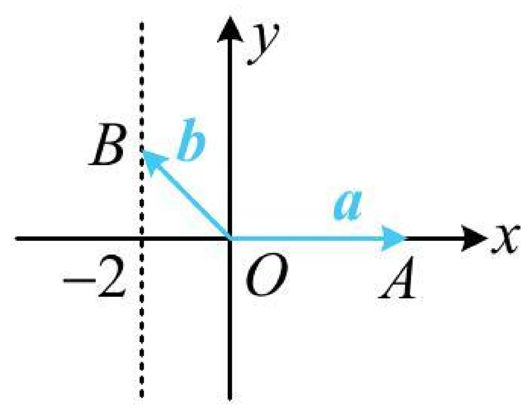
解析：为了便于分析，尝试把向量放到坐标系下，用坐标运算来解决问题，

如图，可设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=(4,0)$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，由 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量与 $\boldsymbol{a}$ 反向且长度为 2 知点 B 在直线 $x=-2$ 上运动，

所以可设 $\boldsymbol{b}=(-2,y)$，其中 $y\in\mathbf{R}$，

故 $|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=|(4,0)-3(-2,y)|=|(10,-3y)|=\sqrt{100+9y^2}$，

所以当 $y=0$ 时，$|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$ 取得最小值 10.



《一数•高考数学核心方法》

9．（2022・北京模拟・★★★）已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\dfrac{\pi}{4}$，$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值是（　　）

（A）$\sqrt{2}-1$　（B）$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　（C）$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　（D）$\sqrt{2}+1$

答案：C

解析：向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 已知长度和夹角，容易搬进坐标系，故设出 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的坐标，用坐标翻译 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，

设 $\boldsymbol{b}=(1,0)$，$\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{c}=(x,y)$，满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，

$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\dfrac{\pi}{4}$，此时 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=(x-1,y-1)$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=(x-1,y)$，

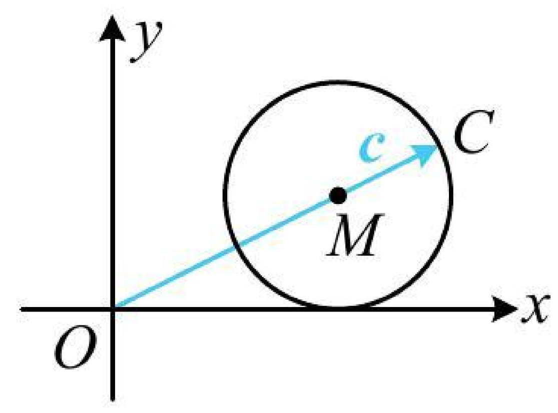
因为 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，所以 $(x-1)^2+(y-1)y=0$，

整理得：$(x-1)^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{4}$，

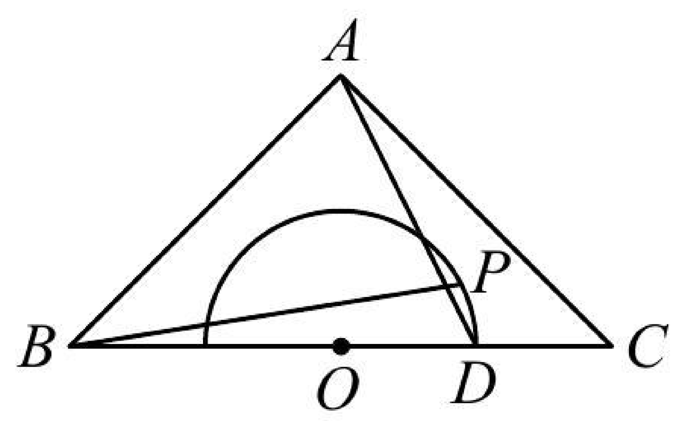
此方程为圆，可画图分析 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值，

记 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，则终点 C 可在圆 $M:(x-1)^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{4}$ 上运动，如图，因为 $|OM|=\sqrt{1^2+(\dfrac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

所以 $|\boldsymbol{c}|_{\max}=|OM|+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.



10．（2022 • 天津模拟 • ★★★★）如图，直角三角形 ABC 中，$AB=AC$，$BC=4$，O 为 BC 的中点，以 O 为圆心，1 为半径的半圆与 BC 交于点 D，P 为半圆上任意一点，则 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的最小值为_____.



答案： $2-\sqrt{5}$

解析： 图形比较规整，容易建系，建立如图所示平面直角坐标系，则 $B(-2,0)$，$A(0,2)$，$D(1,0)$，

半圆的方程为 $x^2+y^2=1(y\geq 0)$ ①，设 $P(x,y)$，则

$\overrightarrow{BP}=(x+2,y)$，$\overrightarrow{AD}=(1,-2)$，所以 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AD}=x+2-2y$，

设 $x+2-2y=t$，则 $x-2y+2-t=0$ ②，

要求 t 的最小值，可将式②看成直线 l 的方程，由于 $P(x,y)$ 同时满足方程①和②，所以直线 l 与半圆有交点，

《一数•高考数学核心方法》

直线 l 可化为 $y=\dfrac{1}{2}x+1-\dfrac{t}{2}$，所以 l 的纵截距为 $1-\dfrac{t}{2}$，

故 t 最小等价于该纵截距最大，此时 l 与半圆相切，

如图，应有 $d=\dfrac{|2-t|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=1$，解得：$t=2\pm\sqrt{5}$，

由图可知 l 的纵截距为正，所以 $t=2-\sqrt{5}$，

故 $(\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AD})_{\min}=2-\sqrt{5}$.